## Eventi condizionati

Dato un evento $E$ abbiamo detto che ad esso corrisponde l'alternativa VERO oppure FALSO; a ben pensarci tale alternativa dipende assai dal tipo di *informazione* che abbiamo sull'esperimento che all'evento è collegato.

Consideriamo due " esperimenti":

**Esempio 1** *Siano dati i due eventi:*

$E = \{$ *Lucia lancia un dado e viene* $2\}$*;*
$F = \{$ *Lucia affronta domani l'esame di Geometria e prende* $28\}$*.*

Nel primo caso siamo disposti, ormai automaticamente, ad assegnare una probabilità: abbiamo "tutti" stabilito $\frac{1}{6}$) perchè tutti abbiamo *supposto, magari implicitamente* che il dado è "regolare". Se, altrimenti, ci avessero detto che sulle facce del dado ci sono numeri tutti diversi da 2, la nostra assegnazione cambierebbe (e sarebbe uguale a zero !).

Nel caso invece dell'evento $F$ l'assegnazione non solo non è così automatica ma sarebbe fortemente influenzata da una qualunque informazione (assente ora nell'enunciato) del tipo: { *Lucia ha studiato* }; { *il professore che la interroga è "buono"* } o, addirittura, { *l'università domani è chiusa per sciopero del personale* }.

Tutto ciò fa sì che, nella realtà, non si debba parlare di probabilità (in senso assoluto) ma solo di probabilità *condizionata*: dobbiamo cioè inquadrare le situazioni solo subordinatamente al verificarsi di qualche altra circostanza. Anche nel caso del dado, in effetti, abbiamo finora sempre accettato il fatto (non scritto) che il dado fosse regolare.

Tali "circostanze" vengono in genere espresse attraverso un evento $H$ che può, se non si verifica, rendere *indeterminato* l'evento stesso (come nel caso dello "sciopero" nel caso dell'evento $F$ precedente).

Per tale motivo è necessario parlare di **evento condizionato**, che indicheremo con $E/H$. Vediamone alcuni esempi.

Iniziamo introducendo un esperimento casuale (con spazio campionario $\Omega$.)

**Esempio 2** *Da un mazzo di* 40 *carte si estrae una carta. Ci si chiede:*

*1) Qual è la probabilità che essa sia un "Re" (evento E)?*

*2) Se, nel frattempo, sono venuto a sapere che la carta estratta è una figura (evento $H$), qual è la probabilità che essa sia un "Re"(evento $E/H$) ?*

**Svolgimento** Anche senza aver mai sentito parlare di "probabilità condizionata" si può, in questo semplice esempio, rispondere subito dicendo

1) $\mathbb{P}(E) = \dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{10}$.

2) $\mathbb{P}(E/H) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$. (Adesso i casi possibili sono solo 12 . . ..)

Come si vede stiamo affrontando il caso della assegnazione di probabilità di un evento **supponendo** di sapere che un certo (altro) evento $H$ si è verificato (con probabilità positiva).

Nel primo caso possiamo pensare anche ad $H = \Omega$ ovvero ad $E = E/\Omega$.

Un evento del tipo $E/H$ risulta pertanto

– VERO (se $E$ è vero ed $H$ è vero),
– FALSO (se $E$ è FALSO ed $H$ è vero),
– INDETERMINATO (se $H$ è falso: in questo caso non ci interessa conoscere la eventuale veridicità di $E$.

Vediamo un altro Esempio.

**Esempio 3** *Per un servizio sul gioco del calcio vengono intervistate (per strada, casualmente) alcune persone. La prima di esse è il sig. Carlo. Ci chiediamo:*

1. *qual è la probabilità che il sig. Carlo sia un* tifoso della Fiorentina *?*

2. *qual è la probabilità che il sig. Carlo sia un* tifoso della Fiorentina *, se sappiamo che il sig. Carlo vive a Firenze ?*

**Svolgimento:** Nell'enunciato del problema non appaiono (apparentemente) dati. Per sopperire a tale situazione dobbiamo far ricorso all'assegnazione frequentista della probabilità ed a qualche "banca dati" (nel nostro caso un Almanacco del calcio).

Iniziamo poi a considerare alcuni eventi; chiamiamo

– $H$ l'evento { essere cittadini italiani; }
– $A$ l'evento { essere un *tifoso della Fiorentina;* }
– $B$ l'evento { essere un *un abitante di Firenze.* }

Sembra quindi che si debba scegliere (a caso) un punto dell'insieme universo $\Omega$ e chiederci con quale probabilità esso appartenga all'insieme $A \cap H$, oppure all'insieme $A \cap B$. (Si veda la Figura 1).

La maggior parte degli italiani (60 milioni circa) non vive a Firenze (360 000 abitanti) e non è tifoso della Fiorentina (1 400 000 nel mondo): quindi gli eventi $A/H$ e $B/H$, hanno, anche intuitivamente, probabilità "piccola".

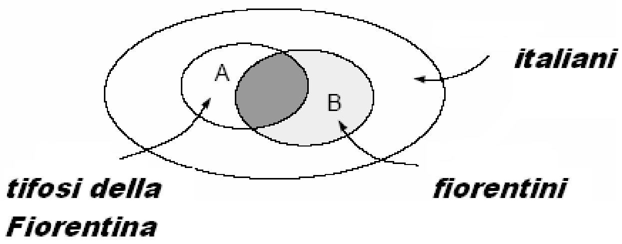


*Figura 1*

In questo caso abbiamo una *probabilità condizionata*, cioè la probabilità che qualcosa accada ("essere tifoso viola") sapendo che un altro evento ("essere cittadino italiano"), ad esso connesso, si è già verificato.

In genere, questa (eventualmente "nuova") informazione altera le probabilità che noi assegniamo agli eventi. Intanto possiamo dire che il nostro evento si verifica se e solo se si verificano sia $A$ sia $H$; di fatto, lo spazio campionario si è ridotto ad $H$. ([1] )

[1]Utilizzeremo nel seguito il simbolo $\#(A)$ col significato di "numerosità dell'insieme $A$.

Abbiamo quindi $\mathbb{P}(A/H) = \dfrac{\#(A \cap H)}{\#(H)} = \dfrac{1\,358\,000}{60\,000\,000} \approx 0.022$ (avendo "tolto il 3% di tifosi viola residenti all'estero); analogamente abbiamo $\mathbb{P}(B/H) = \dfrac{360\,000}{60\,000\,000} \approx 0.006$.

**Nota**: Ci si potrebbe chiedere perchè non abbiamo considerato $H$ come "insieme universo": la risposta è data dal fatto che, in tale ipotesi, l'insieme $A$ *non* sarebbe un sottoinsieme di $H$.

Per la seconda questione ci chiediamo quale sia la probabilità che una persona che viva a Firenze sia anche "tifoso della Fiorentina"; tale assegnazione numerica, intuitivamente, non sembra "piccola"; ma quanto vale ?

Anche in questo caso abbiamo una *probabilità condizionata*, cioè la probabilità che qualcosa accada ("essere tifoso viola") sapendo che un altro evento ("essere abitante di Firenze"), ad esso connesso, si è già verificato.

Quindi, la probabilità di A, data la conoscenza del fatto che $B$ si è verificato, diventa $\mathbb{P}(A/B) = \dfrac{\#(A \cap B)}{\#(B)}$.

Da dati di mercato (abbonamenti, spettatori paganti, $\cdots$) possiamo evincere che $\#(A \cap B) \approx 24\,500$; tale dato ci conduce a $\mathbb{P}(A/B) \approx 0.68$. Dunque la probabilità dell'evento "essere tifoso viola" (dopo le nuove informazioni) è aumentata da 0.021 a 0.68 ovvero è "aumentata" di oltre 30 volte.

**Nota:** Abbiamo scritto $A/B$ intendendo con ciò la trattazione dell'evento $A$ *sapendo* che è già noto $B$. Naturalmente se scrivessimo $B/A$ intenderemmo lo studio dell'evento $B$ *sapendo* che si è già verificato l'evento $A$. Ci si potrebbe chiedere se esiste una qualche relazione fra $B/A$ e $A/B$. Il prossimo Esempio dice che tale relazione proprio non può esistere.

**Esempio 4** *: Calcolare la probabilità degli eventi $A/B$ e $B/A$ con:*

$$A = \{\ F \text{ abita a Roma e } \}$$
$$B = \{F \text{ è il calciatore italiano pi ù pagato in Serie } A\}.$$

*Abbiamo, sempre usando l'assegnazione frequentista:*

$$\mathbb{P}(A/B) \approx 1 \text{ Francesco Totti vive a Roma... .}$$

$$\mathbb{P}(B/A) \approx 0 \text{ a Roma ci sono } 2\,700\,000 \text{ abitanti .}$$

Se due eventi hanno probabilità vicine a zero o ad uno, ciò significa che sono praticamente l'evento certo e l'evento impossibile. Nello stesso modo potremo costruire eventi di probabilità qualsiasi. Dunque $A/B$ e $B/A$ non possono essere "collegati".

Siamo adesso pronti per la seguente definizione:

**Definizione**. Siano $A$ e $H$ eventi di un esperimento casuale con $\mathbb{P}(H) > 0$. La probabilità condizionata di $A$ dato $H$ è definita come

$$\mathbb{P}(A/H) = \frac{\mathbb{P}(A \cap H)}{\mathbb{P}(H)}.$$

**Nota:** Se $H = \Omega$ abbiamo $\mathbb{P}(A/\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(\Omega)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{1} = \mathbb{P}(A)$. Dunque, nel caso di condizionamento all'evento certo $\Omega$, ritroviamo la definizione d probabilità che conoscevamo.

Il fatto poi che $\mathbb{P}(H)$ debba essere diverso da zero segue dall'osservazione, naturale, che non possiamo subordinare ad un evento di probabilità nulla ! Formalmente poi, $H \neq \emptyset$ significa che *non è noto che $H$ è falso.*

**Esempio 5** *Quattro giocatori pescano ciascuno una carta da un mazzo di* 40 *carte. Qual è la probabilità di pescare tutti "semi" diversi ?*

**Svolgimento**: Definiamo i seguenti eventi:

$A = \{$ le quattro carte sono di seme diverso $\}$;
$A_1\{$ si estrae (a caso) la prima carta $\}$;
$A_2\{$ si estrae (a caso) la seconda carta di seme diverso dalla prima $\}$;
$A_3\{$ si estrae (a caso) la terza carta di seme diverso dalle prime due $\}$;
$A_4\{$ si estrae (a caso) la quarta carta di seme diverso dalle prime tre$\}$.

Allora

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$$

$$\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2/A_1)\mathbb{P}(A_3/(A_1 \cap A_2))\mathbb{P}(A_4/(A_1 \cap A_2 \cap A_3)) =$$

$$= \frac{40}{40} \cdot \frac{30}{39} \cdot \frac{20}{38} \cdot \frac{10}{37} \approx 0.109.$$

**Esempio 6** *Consideriamo una classe di* 100 *studenti dei quali conosciamo pesi (in kg, in ordinata) ed altezza (in cm, in ascissa).*

| *alt./pesi* | 160 | 165 | 170 | 175 | 180 | $\geq 185$ | *Tot.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\leq 55$ | – | 4 | 7 | 2 | – | – | 13 |
| 60 | – | 3 | 18 | 2 | 2 | – | 25 |
| 65 | 1 | 2 | 11 | 3 | 5 | 1 | 23 |
| 70 | 1 | – | 2 | 4 | 9 | 4 | 20 |
| 75 | – | – | – | 6 | 4 | 2 | 12 |
| 80 | – | – | – | 2 | 1 | 2 | 5 |
| $\geq 85$ | – | – | – | – | 2 | – | 2 |
| *Tot. studenti* | 2 | 9 | 38 | 19 | 23 | 9 | 100 |

*E ci chiediamo* “Qual è la probabilità che uno studente pesi 70 kg sapendo che è alto 170 cm. ?

**Svolgimento** Si deve calcolare $\mathbb{P}(p = 70/a = 170) = \dfrac{\mathbb{P}[(p = 70) \cap (a = 170)]}{\mathbb{P}(a = 170)}$.

Dalla tabella abbiamo

$$\mathbb{P}(a = 170) = 0.38; \quad \mathbb{P}((p = 70) \cap (a = 170)) = \frac{2}{38} \approx 0.0526.$$

Ovviamente la probabilità condizionata, dato il verificarsi di $H$ dovrà essere sempre una probabilità, ovvero deve soddisfare le proprietà della probabilità (riassunte dagli assiomi di Kolmogorov). Si può, ad es., pensarla come normalizzata attraverso una una costante di proporzionalità: tale costante potrà essere $\dfrac{1}{\mathbb{P}(H)}$.

Questo ed altri fatti sono considerati nei seguenti esercizi.

**Esercizio 1** *Dimostrare, utilizzando le proprietà precedenti, che:*

*1)* $\mathbb{P}(A/H)$, *in funzione di* $A$ *e per* $H$ *dato, è una misura di probabilità.*

*2) se* $H \subset A$ *allora* $\mathbb{P}(A/H) = 1$;

*3) se* $A$ *e* $H$ *sono incompatibili, allora* $\mathbb{P}(A/H) = 0$;

*4)* $\mathbb{P}(A/H) < \mathbb{P}(A)$ *se e solo se* $\mathbb{P}(H/A) < \mathbb{P}(H)$;

5 $\mathbb{P}((A \cup B/C) = \mathbb{P}(A/C) + \mathbb{P}(B/C) - \mathbb{P}((A \cap B)/C)$;

*6)* $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n) =$
$\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2/A_1)\mathbb{P}(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n/(A_1 \cap A_2) \cdots A_{n-1})$.

**Esercizio 2** *Mostrare, attraverso Esempi, che vale l affermazione*

$$\mathbb{P}(A^c/B) = 1 - \mathbb{P}(A/B).$$

*mentre NON vale in generale che*

$$\mathbb{P}(A/B^c) = 1 - \mathbb{P}(A/B).$$

(*Suggerimento*: Per la prima affermazione si può osservare che vale la relazione $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$; per la seconda si considerino gli eventi $A = \{$ si estrae, da un mazzo di 52 carte una carta di cuori $\}$ e $B = \{$ si estrae, da un mazzo di 52 carte una figura $\}$,)

*

*   *

## Il concetto di Indipendenza (stocastica)

.

Se in uno (qualsiasi) degli Esempi precedenti otteniamo l'uguaglianza (numerica):

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A) \text{ oppure } \mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B),$$

siamo naturalmente portati a dire che gli eventi $A$ e $B$ NON sono dipendenti.

Tale affermazione è vera e può essere scritta ne modo seguente (che dà la definizione di indipendenza adottata da molti autori):

> Si dice che due eventi $A$ e $B$ sono **indipendenti** se vale la relazione
>
> $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Essa segue direttamente da quanto detto sopra osservando che se $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$ e se $\mathbb{P}(A/B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ allora $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Le due "definizioni" di indipendenza sono perfettamente equivalenti anche se la formulazione $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$ potrebbe intuitivamente rendere più esplicito tale concetto.

**Nota** Si parla in questi casi di *Indipendenza stocastica* (dal greco *stochastikós*, congetturale, aleatorio, ...) oppure di *Indipendenza probabilistica* e, talvolta, anche di *Indipendenza statistica*.

E se gli eventi sono più di due ? Il prossimo Esempio ci aiuterà a rispondere anche a tale questione.

**Esempio 7** *Un'urna contiene* 10 *palline Rosse,* 5 *Viola e* 7 *Gialle. Qual è la probabilità di estrarne successivamente, senza restituzione, Tre di colore diverso ?*

**Svolgimento** Usiamo la proprietà 6) dell'Esercizio precedente. Abbiamo, indicando con $A_1$, $A_2$, $A_3$ gli eventi che indicano rispettivamente l'estrazione di una pallina Rossa, Viola e Gialla:

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{10}{22}, \quad \mathbb{P}(A_2/A_1) = \frac{5}{21}, \quad \mathbb{P}(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{7}{20}.$$

Dunque $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{10}{22}\frac{5}{21}\frac{7}{20} = \frac{5}{132}$.

Se supponiamo che gli eventi $A_1$, $A_2$, $A_3$ siano tali che $\mathbb{P}(A_2/A_1) = \mathbb{P}(A_2)$ e $\mathbb{P}(A_3/A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_3)$: ciò significa che l'accadere di un evento NON è condizionato dall'accadere (o dal non accadere) di uno (o da una qualsiasi "combinazione") degli altri eventi. In parole la probabilità del verificarsi dell'evento $A_1$ è la stessa della probabilità del verificarsi dell'evento "$A_2$ sapendo che si è verificato $A_1$".

In tali ipotesi la proprietà 6) dell' Esercizio precedente può essere scritta come:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n).$$

Ciò ci (ri)porta al concetto di **eventi indipendenti.**

Se abbiamo due eventi la scrittura precedente assume la forma:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2).$$

Se ne abbiamo tre dobbiamo tener conto del fatto che, oltre alla prevedibile richiesta:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3),$$

deve verificarsi anche che

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2), \quad \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3), \mathbb{P}(A_3 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(A_2).$$

In altre parole, quando abbiamo più eventi, l'indipendenza deve essere "verificata" a due a due, a tre a tre, ecc. La definizione formale quindi è la seguente:

**Definizione**.

$N$ eventi sono indipendenti se $\forall k = 2, 3, \cdots, N$ si ha

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = \mathbb{P}(E_{i_1})\mathbb{P}(E_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(E_{i_k})$$

per ogni scelta degli indici $i_1, \cdots, i_k$.

**Nota**: Il concetto di *indipendenza* è un concetto molto delicato. Presentiamo un Esempio, molto semplice e preso dai giochi di carte, e poi giustificheremo quanto appena detto.

**Esempio 8** *Consideriamo i seguenti eventi:*

$A = \{$ *si estrae, da un mazzo di carte, una carta di Picche* $\}$;

$B = \{$ *si estra, da un mazzo di carte, un Asso* $\}$.

*Supponiamo di giocare a poker o a bridge (cioè con un mazzo di* 52 *carte). Allora abbiamo:*

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}; \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{13};$

*Da qui, osservando che* $A \cap B =$ *Asso di Picche* , *si ha*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{52} = \frac{1}{4}\frac{1}{13} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

*Pertanto potremo dire che "esser Picche" oppure "essere Asso" sono eventi indipendenti.*

*Supponiamo però adesso di giocare a canasta o a scala 40 (cioè con un mazzo di* 54 *carte: le due precedenti più* 2 *carte jolly). Allora abbiamo:*

$\mathbb{P}(A) = \frac{13}{54}; \quad \mathbb{P}(B) = \frac{4}{54}$. *Ma adesso*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{54} \neq \frac{13}{54}\frac{4}{54} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

*Pertanto NON potremo più dire che "esser Picche" oppure "essere Asso" sono eventi indipendenti.*

Dove sta la "delicatezza" del problema ?

Essa risiede nel fatto che l'indipendenza è una conseguenza delle assegnazioni di probabilità: dunque l'indipendenza (o la dipendenza !) non sono proprietà *intrinseche* degli eventi ma solo una "decrizione" del grado di fiducia che lo sperimentatore (lo statistico, ..., ) ha sul verificarsi degli eventi stessi.

Anche qualora ci fosse unanimità nel ritenere due eventi indipendenti, dobbiamo ritenere che la valutazione sull'indipendenza sia un "accordo intersoggettivo" (che non rende "oggettiva" la relazione fra gli eventi).

Talvolta vi potrebbe pure essere conflitto far le diverse valutazioni. Ad es. si considerino i seguenti due eventi:

$A = \{$ *avere i genitori divisi* $\}$;
$B = \{$ *essere un figlio cresciuto con problemi* $\}$.

E si consideri la loro (eventuale) indipendenza mettendosi nell'ottica di un (genitore) favorevole al divorzio oppure nell'ottica di un genitore contrario.

In Matematica (ovvero in Statistica oppure nel Calcolo delle probabilità) l'indipendenza è dunque da considerarsi "un'opinione" (ancorché alla luce del *Principio di coerenza*) e dobbiamo dire che, per quanto ci riguarda, due eventi sono indipendenti se e solo se vale l'uguaglianza $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

*
*  *

Facciamo anche alcuni Esempi "applicati".

**Esempio 9** *Un sistema per la generazione di corrente elettrica è formato da tre generatori indipendenti. La potenza richiesta dal sistema può essere effettivamente fornita se almeno due dei tre generatori funzionano correttamente. Sia $G = \{$il sistema eroga la potenza richiesta$\}$ un evento d'interesse: se ne calcoli la probabilità.*

**Svolgimento** Indichiamo con $A$, $B$ e $C$ gli eventi che indicano il corretto funzionamento del primo, secondo e terzo generatore e poniamo $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = p$.

I casi possibili sono $2^3 = 8$. Essi sono dati da:

$$(A \cap B \cap C), (A \cap B \cap C^c), (A \cap B^c \cap C), (A \cap B^c \cap C^c),$$

$$(A^c \cap B \cap C), (A^c \cap B \cap C^c), (A^c \cap B^c \cap C), (A^c \cap B^c \cap C^c).$$

Di questi, quelli in cui almeno due generatori sono attivi sono quattro: il caso in cui funzionano tutti e tre e i tre casi in cui si ha il cattivo funzionamente di uno solo. La loro unione è data da:

$$G = \{(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$$

Trattandosi di eventi incompatibili, la probabilità dell'unione è data dalla somma delle probabilità. Dunque si ha:

$$\mathbb{P}(G) = p^3 + 3p^2(1-p) = 3p^2 - 2p^3.$$

**Esempio 10** *In una tombola familiare i numeri sono indicati da* 00 *a* 90. *Ciascuno dei* 62 *giocatori acquista (a caso) una cartella con un solo numero: qual è la probabilità che nessuno dei giocatori vinca ?*

**Svolgimento**: Indichiamo con $S_k$ l'evento "il k-simo giocatore **non** vince".

Allora $\mathbb{P}(\text{nessun giocatore vince}) = \mathbb{P}(S_1 \cap S_2 \cap \cdots S_{62}) =$

$(\frac{89}{90})^{62} \approx 0.5002.$

**Nota**: Visto il risultato ottenuto, sul fatto che nessun giocatore vince, si può scommettere "alla pari".

**Esempio 11** *Due dadi vengono lanciati* 72 *volte. Qual è la probabilità di ottenere la somma dei punti uguale a 2 per almeno 2 volte ?*

**Svolgimento**: Nel lancio di dadi si presuppone che gli eventi siano *indipendenti* e pertanto si usano le formule relative all'indipendenza.

Per ogni lancio la probabilità di "successo" è data da $\mathbb{P} = \frac{1}{36}$.
La probabilità richiesta è allora data da :

$$\mathbb{P} = 1 - [\binom{72}{1}(\frac{1}{36})^1(\frac{35}{36})^{71} + \binom{72}{0}(\frac{1}{36})^0(\frac{35}{36})^{72}] =$$

$$1 - (\frac{35}{36})^{71}[\frac{72}{36} + \frac{35}{36}] \approx 0.597.$$

**Nota**: Come viene detto in altra parte, il calcolo precedente può essere "semplificato" utilizzando l'approssimazione di Poisson oppure l'approssimazione normale della distribuzione binomiale. Per tutte queste distribuzioni è esenziale parlare di eventi indipendenti.

*

* *

**Nota conclusiva**: Abbiamo visto che la probabilità condizionata è lo strumento "giusto" per affrontare le questioni che trattano lo studio dell'incertezza. Il fatto è che la realtà condizionata dal nostro modo di descriverla e che sta a noi decidere, per fare ciò, quale metodo impiegare: in un certo senso noi non scopriamo propriamente, ma "determiniamo" come il mondo è.

Per gli eventi che appaiono verosimili, la differenza dei dati che ogni uomo ha su di essi è una delle cause principali della diversità di opinioni relative ai medesimi oggetti.

Supponiamo, ad esempio, che si abbiano tre urne $A, B, C$, di cui una contenga solo una pallina Nera, mentre le altre due solo palline Rosse: ci si chiede se, estrando una pallina dall'urna $C$ quale sia la probabilità che essa sia nera. Se si ignora quale delle tre urne contenga solo pallinee Nere, le tre ipotesi possibili sembreranno ugualmente probabili, e poiché una pallina Nera può essere estratta solo dalla prima ipotesi, la probabilità di estrazione è uguale ad un terzo. Se abbiamo altre informazioni, ad es., se è noto che l'urna $A$ contiene solo palline Rosse, l'indecisione verte allora solo sulle urne $B$ e $C$, e la probabilità che la pallina estratta dall'urna $C$ sia nera è del 50%. Naturalmente si ha probabilità 1 se abbiamo avuto (da qualche informatore) la certezza che le urne $A$ e $B$ contengono solo palline Rosse.

Un enunciato del tipo:

"Se un evento$H$ fosse accaduto allora l'evento $E$ sarebbe probabilmente accaduto"

è pertanto interpretabile come una probabilità condizionata.

Nella vita comune, un enunciato del tipo:

"La maggior parte delle persone disinteressate (ad un certo argomento) dice la verità"

si può leggere come

$$\mathbb{P}(Tizio\ \textit{dice la verità}\ /Tizio\ \textit{è disinteressato}\ )\ > 0.50.$$

Quello che adesso, paradossalmente, può apparire più difficile da capire è la *probabilità assoluta* (o, come è chiamata nel contesto della statistica bayesiana, **probabilità a priori** o *probabilità iniziale*ovvero $\mathbb{P}(H)$). Ciò vuol essenzialmente significare "in assenza di informazioni" significative, ad es., senza averne esperienza comune (come nel lancio di un dado) oppure senza averne fatto alcun esperimento al riguardo; *probabilità a priori* significherà quindi assegnare una valutazione all'incertezza indipendentemente e precedentemente agli "aggiornamenti" che l'esperienza comporta.