# RIFLESSIONI SU POSSIBILI PERCORSI NELL'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA

**Abstract**

The discovery of the existence of non-Euclidean geometries gave rise, in the last decades of the 19th and during the whole 20th century, to numerous researches on the foundations of geometry. Starting from the two traditional approaches (Euclid's Treatise and the method of Cartesian coordinates) these researches led to several alternative approaches (e.g. Hilbert's Axiomatics, Transformation Geometry according to Klein's 'Erlangen Program', Vector Spaces and Linear Algebra, Computer Technology as a tool for Automatic Theorem Proving and CAD applications,...).

In this report the author considers the didactic transpositions of these approaches, as they emerge from an analysis of Italian pre-university geometry textbooks. He summarizes his findings in the form of a few "paths" pointing out the main positive and negative aspects of each of them.

Vinicio Villani

**RIFLESSIONI SU POSSIBILI PERCORSI NELL'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA**

Vinicio Villani, Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Negli ultimi decenni dell'Ottocento e durante tutto il Novecento, a seguito della scoperta dell'esistenza delle geometrie non euclidee, le *ricerche sui fondamenti della geometria* si sono intensificate ed estese in varie direzioni. Partendo dai due approcci tradizionali (il trattato euclideo e il metodo delle coordinate cartesiane) tali ricerche hanno portato all'elaborazione di numerosi approcci alternativi (per es. l'assiomatica di Hilbert, la Geometria delle trasformazioni secondo il "Programma di Erlangen" di Klein, l'uso degli spazi vettoriali e dell'algebra lineare, il ricorso ai moderni mezzi di calcolo elettronico come strumenti per la "dimostrazione automatica dei teoremi" e per la "grafica computazionale",...).

Nel predisporre una traccia per questa relazione mi ero prefisso l'obiettivo di prendere in esame le principali *trasposizioni didattiche* di tali approcci, operate dagli autori dei libri di testo italiani di geometria di livello pre-universitario (dalla materna alla maturità [1]) e di sintetizzarle sotto forma di un numero limitato di "percorsi", evidenziando quelli che considero i maggiori pregi e difetti di ciascuno di essi.

L'attuazione di questo obiettivo si è rivelata però assai più ardua del previsto, per almeno tre ordini di motivi che avevo inizialmente sottovalutato:

**1**. È difficile, oltre che arbitrario, tracciare un netto confine tra ciò che va considerato geometria e tutto il resto della matematica (aritmetica, algebra, trigonometria, grafici di funzioni, istogrammi e altri sussidi visivi utilizzati per es. in ambito statistico-probabilistico,...).

**2**. È difficile, oltre che dispersivo, tenere conto dei molteplici condizionamenti dovuti a fattori esterni: programmi ministeriali, diversificazione delle tipologie scolastiche a livello secondario superiore (licei, istituti tecnici, istituti professionali), ruolo dei libri di

---

[1] Qui e nel seguito continuerò ad utilizzare la terminologia tradizionale per denotare i vari tipi di scuole, di programmi, di esami, in quanto le recenti modifiche della terminologia ufficiale non mi sembrano particolarmente felici, né stabilmente assestate, né finora entrate nell'uso corrente.

testo, tradizioni consolidate, atteggiamenti degli allievi, aspettative della società, dei colleghi, dei genitori, ...

**3**. Ogni allievo nel corso dei suoi studi viene “esposto” ad un insegnamento-apprendimento della geometria, a partire da quando ha 3 o 4 anni, per almeno 200 ore complessive nella scuola materna, elementare e media e per altrettante ore complessive nella scuola secondaria superiore (fino al termine dell’obbligo scolastico o fino alla maturità).

Volendo mettere a confronto, come io mi ero proposto di fare:
5 schemi di percorsi relativi alla scuola materna, elementare e media,
7 schemi di percorsi relativi alla scuola secondaria superiore
e 5 esempi di approcci metodologici diversi,
ho quindi dovuto comprimere in una sola ora di esposizione e in una ventina di pagine a stampa le mie riflessioni su ciò che nella realtà scolastica richiede qualche migliaio di ore.
E anche questo è chiaramente difficile, per non dire “impossibile”.

Mi scuserete quindi se sorvolerò su molti dettagli, rimandando per maggiori approfondimenti alla bibliografia posta alla fine dell’esposizione, e in particolare al mio recente libro rivolto ad insegnanti e a futuri insegnanti:

**“Cominciamo dal punto”**

(citato nel seguito come [VILLANI, 2006]) nel quale ho cercato di illustrare e motivare le mie opinioni personali su vari aspetti dell’insegnamento-apprendimento della geometria.

Premetto ancora qualche riflessione di carattere generale prima di entrare nello specifico dei singoli percorsi.

**I**. La professionalità dell’insegnante non dovrebbe limitarsi alla conoscenza degli argomenti e delle modalità di insegnamento-apprendimento appropriate per il livello scolare nel quale egli opera (vedi in proposito le considerazioni sui livelli di Van Hiele nel §2 di [VILLANI, 2006]), ma dovrebbe includere anche un’attenzione ai contenuti e ai metodi che gli allievi hanno vissuto nel segmento precedente e a ciò che li aspetterà nel segmento successivo. Nel caso della scuola materna, il “prima” si riferisce alle conoscenze pre-scolari. Nel caso delle ultime classi della scolarità obbligatoria il “dopo” si riferisce al bagaglio culturale e alle conoscenze tecniche che potranno contribuire a trasformare gli allievi, divenuti adulti, in cittadini informati; si riferisce inoltre alle aspettative specifiche del mondo del lavoro e - per chi proseguirà gli studi - a quelle delle (molte) facoltà universitarie nelle quali la matematica gioca un ruolo non marginale, vedi per esempio [NUMI, 2006].

**II**. L'efficacia di un percorso, qualunque esso sia, dipende oltre che dalle scelte contenutistiche e metodologiche anche da numerosi altri fattori, in primo luogo da una costante attenzione alla precisione del linguaggio e alla correttezza dei ragionamenti, alla capacità di tradurre le informazioni da un linguaggio ad un altro, e di reperire autonomamente e utilizzare correttamente le informazioni di volta in volta occorrenti consultando libri di testo, i propri appunti, gli appositi manuali, Internet. Per ulteriori riflessioni sulle problematiche del linguaggio in matematica rinvio a [FERRARI].

**III**. Per valutare l'efficacia di un percorso di insegnamento-apprendimento e le sue ricadute sui singoli allievi si può prendere in considerazione una pluralità di indicatori. Ne cito alcuni, assai eterogenei tra loro, senza pretese di completezza e senza gerarchie di importanza o significatività, ben consapevole che indicatori diversi potranno portare a conclusioni discordanti:

- Successo alle olimpiadi della matematica o ad altre gare matematiche
- Risultati del progetto P.I.S.A. (vedi [OECD])
- Indagini statistiche INVALSI
- Confronti tra classi parallele
- Recupero di allievi demotivati
- Propensione ad iscriversi a corsi di laurea in facoltà scientifiche.

Per non frastornare inutilmente chi mi ascolta, anticipo fin d'ora quello che sarà il senso della mia riflessione conclusiva:

Le finalità dell'insegnamento-apprendimento della geometria sono molteplici (scienza dello spazio, palestra per allenarsi al ragionamento ipotetico-deduttivo, serbatoio inesauribile di problemi e modelli matematici, strumento insostituibile per un gran numero di applicazioni,... Cfr. per esempio i due volumi del seminario [MPI] e il rapporto internazionale ICMI curato da [MAMMANA - VILLANI]).
Non deve quindi meravigliare che perverrò alla constatazione che

**non esiste un “percorso ideale”**

buono per tutte le circostanze. Tutto inutile, allora? NO, è importante conoscere le varie alternative possibili per essere in grado di valutarne i “pro” e i “contro” e per valorizzare gli aspetti più significativi dell’uno piuttosto che dell’altro percorso, in relazione alle diverse realtà scolastiche nelle quali ci si trova ad operare. Un intelligente e mirato “eclettismo” potrà rivelarsi più efficace dell’aderenza maniacale ad un unico percorso “monolitico”. A condizione che questo ricorso ad una pluralità di punti di vista diversi non si riduca ad una giustapposizione di capitoli slegati tra loro (camuffati da “moduli” o “unità didattiche”), e che risulti ben motivato nel “contratto didattico” che si stabilisce in ogni classe (in forma esplicita o implicita) tra docente e allievi.

Come preannunciato, passo quindi a schematizzare sotto forma di schede sintetiche (talmente sintetiche da rischiare di apparire caricaturali):

le 5 tipologie di **percorsi iniziali** (in sigla PI) relativi alle scuole materne, elementari e medie,

le 7 tipologie di **percorsi avanzati** (in sigla PA) relativi alle scuole secondarie superiori

le 5 tipologie di **approcci metodologici** (in sigla AM) suscettibili di essere abbinati ad uno qualunque di tali 12 percorsi con l’aggiunta, come sesta tipologia, di una breve descrizione di ciò che intendo per **approccio metodologico di tipo eclettico**.

Ogni scheda consta di una **descrizione** delle caratteristiche salienti del percorso in esame, seguita da un elenco di quelli che a mio giudizio ne sono i principali “**pro**” e “**contro**” (beninteso, i “pro” e i “contro” non hanno sempre lo stesso peso: in taluni casi prevalgono gli aspetti positivi, in altri quelli negativi).

## DESCRIZIONE DEI 5 PERCORSI INIZIALI (DALL’ETÀ PRE-SCOLARE AL TERMINE DELLA SCUOLA MEDIA)

### PI.1 Dallo spazio al piano (percorso fusionista)

Descrizione: Si inizia con la manipolazione ludica di oggetti solidi (dadi, scatole, piramidi, palline, palloni, ciambelle) passando poi gradualmente all’osservazione qualitativa e quantitativa delle loro parti costitutive e delle loro reciproche relazioni (facce, spigoli, vertici, angoli, sezioni piane, simmetrie (vedi per es. [CASTELNUOVO] e [VILLANI, 1985]), costruzioni effettuate col “Lego”, o con i pezzi di

un “meccano”, o con fogli di carta e cartoncini opportunamente ritagliati , relazioni di parallelismo e di perpendicolarità, ombre (vedi per es. [BOERO]), ecc.
Pro: Il percorso è in accordo con lo sviluppo genetico della percezione spaziale e consente di tradurre in un momento successivo le esperienze infantili concrete in riflessioni teoriche più strutturate (rigidità dei triangoli e dei tetraedri, disuguaglianza triangolare, uso di riga, squadra e compasso, simmetrie, effetti di prospettiva, ...)
Contro: Nel prosieguo degli studi la sistematicità impone (ma è proprio ineluttabile ? ) una inversione del percorso (dal piano allo spazio).

**PI.2 Dal piano allo spazio (percorso tradizionale)**

Descrizione: Si segue fin dall’inizio della scolarità il percorso tradizionale che consiste nell’affrontare dapprima la geometria del piano e dei suoi elementi costitutivi (punti e rette) per passare solo in un secondo momento alla geometria dello spazio.
Pro: Il percorso prefigura quello che gli allievi incontreranno nella scuola media e in quella superiore.
Contro: Il percorso tradizionale privilegia il “sapere” (mnemonico) e penalizza il “saper fare” (con coinvolgimento attivo degli allievi). In particolare penalizza la geometria tridimensionale, l’intuizione spaziale e la manipolazione di solidi geometrici.

**PI.3 Di tipo insiemistico-aritmetico-algebrico**

Descrizione: La geometria viene vista come serbatoio di esercizi di tipo insiemistico (classificazioni), aritmetico (calcoli di perimetri, aree, volumi), algebrico (formule inverse, equivalenze).
Esempio di testo per la scuola media: [ORIOLO]
Pro: Il percorso collega la geometria con altre parti della matematica e può essere utile come raccordo tra la scuola media e i primi anni della scuola secondaria superiore.
Contro: Gli aspetti autenticamente geometrici vengono penalizzati a favore di un formalismo che rischia di essere avulso dalle esperienze di vita reale degli allievi (basti pensare alle famigerate “equivalenze”: quanti allievi hanno un’idea della capienza, espressa per es. in litri, di un contenitore di forma cubica con spigoli lunghi un metro? ).

**PI.4. Con particolare attenzione agli aspetti grafici**

Descrizione: Non ci si limita a richiamare l’attenzione degli

allievi sulle figure geometriche bi- e tri-dimensionali illustrate nel libro di testo, ma si chiede ad essi di realizzarle o costruirle personalmente. Nel disegno si tende a privilegiare l'uso di carta quadrettata.
Pro: "Fare" è più istruttivo che osservare cose fatte da altri. La carta quadrettata facilita la realizzazione di disegni "corretti" e rappresenta un avvio all'uso delle coordinate cartesiane.
Contro: Se prevale l'uso di carta quadrettata, ne derivano stereotipi del tipo: triangoli tutti con "base orizzontale", cubi tutti in posizione "standard", e resta quindi penalizzato il disegno a mano libera o con riga, squadra e compasso su carta bianca.

**PI.5 Con uso sistematico di sussidi informatici**

Descrizione. Si usa apposito software (per es. Logo, Cabri) in sostituzione o in aggiunta ad altri sussidi più tradizionali.
Pro: Il percorso consente di familiarizzare gli allievi, fin dai primi anni di scuola, con l'uso di un computer.
Qualora si utilizzassero ai fini didattici anche opportuni videogiochi (per es. "Tetris") il che però raramente avviene, si avrebbero ottimi spunti per riflettere sulle rappresentazioni piane di oggetti tridimensionali.
Contro: Sono penalizzati gli allievi che non dispongono di un computer a casa propria. Rischia di essere emarginato anche il disegno con riga, squadra e compasso, nonché la geometria tridimensionale.

## DESCRIZIONE DEI 7 PERCORSI AVANZATI (SCUOLE SECONDARIE SUPERIORI)

**PA.1 Di impostazione tradizionale euclidea**

Descrizione: Ci si attiene, salvo modifiche marginali, al classico trattato di [EUCLIDE] (più precisamente: al primo dei suoi 13 libri, o poco più).
Pro: Palestra per allenarsi a ragionare correttamente (non solo in geometria). Giusto equilibrio tra rigore logico e aspetti figurali.
Contro: I postulati non reggono alla critica moderna.
Vi sono troppi preliminari (proposizioni, lemmi, teoremi, corollari,...) prima di arrivare a qualche risultato significativo.
Non lascia spazio all'iniziativa personale né ad attività di "problem-solving" (si pensi al rito della memorizzazione di enunciati e dimostrazioni con successiva recita nelle interrogazioni).

Il “transfer” del ragionare corretto dall’ambito asettico della geometria a quello assai meno formalizzato della vita quotidiana e professionale non è affatto scontato.
Esempi di testi scolastici: Ne sono stati pubblicati numerosi tra la fine dell’Ottocento e l’inizio del Novecento, per es. Sannia-D’Ovidio, Faifhofer, De Paolis. Per ulteriori informazioni al riguardo rinvio all’articolo di [MAMMANA].

**PA.2 Di impostazione hilbertiana**.

Descrizione: Il percorso, partendo da PA.1, tiene conto della revisione critica del trattato di Euclide operata alla fine dell’Ottocento da [HILBERT]. Nella maggior parte degli attuali testi scolastici che seguono questa impostazione la trattazione viene ulteriormente appesantita dal ricorso a nozioni e notazioni insiemistiche (di cui Hilbert non fa uso).
Pro: Rigore e sistematicità (quasi) ineccepibili.
Contro: Eccessivi appesantimenti espositivi. Spesso i libri scolastici di questo tipo derivano da trattazioni di tipo PA.1 con l’aggiunta (in nota o in appendice) di postille che servono a mettere gli autori in pace con la loro coscienza matematica piuttosto che a “fare cultura”.
Anche nei testi scolastici più recenti e nella prassi didattica corrente è stato largamente disatteso il saggio consiglio (presente per es. nei programmi Brocca) di non eccedere prematuramente col rigore, e di posticipare una riflessione critica globale sulle strutture assiomatiche agli ultimi anni delle scuole secondarie superiori.

I testi scolastici del “dopo Hilbert” sono assai numerosi. Particolarmente istruttivo può essere un confronto fra le successive edizioni di testi “longevi” e ad ampia diffusione, quali [ENRIQUES-AMALDI] e [CATENI FORTINI ET AL]. Ugualmente istruttivo può essere un confronto fra le diverse versioni di questi (o altri) testi a seconda dei tipi di scuole a cui sono rivolti (Liceo scientifico, classico, magistrale, Istituti tecnici e professionali).

**PA.3 Con le trasformazioni geometriche**

Descrizione. Si utilizza un’assiomatica (di tipo metrico) introdotta circa 50 anni fa da [CHOQUET]. Le nozioni basilari sono: la funzione distanza e le simmetrie assiali.
Pro: Il percorso si inquadra nella visione di Klein (Programma di Erlangen, fine ’800) che classifica le varie possibili geometrie in base

ai rispettivi gruppi di trasformazioni (isometrie e similitudini, affinità, proiettività, trasformazioni analitiche, differenziali, topologiche). Vedi anche [VILLANI, 1994 e 1995].
Contro: L'obiettivo ambizioso di far apprezzare la valenza culturale dell'impostazione di Klein non viene raggiunto in quanto ci si limita allo studio di un unico gruppo di trasformazioni (isometrie e similitudini).
Si deve presupporre la conoscenza dei numeri reali (creando un circolo vizioso, visto che l'introduzione dei numeri reali viene motivata con riferimento a problemi geometrici).

Non facilita il passaggio dalla geometria del piano a quella dello spazio. Alcune nozioni vengono introdotte in modo artificioso (perpendicolarità traslazioni e rotazioni definite in termini di simmetrie assiali,...).
Esempio di testo scolastico [PRODI ET AL].

**PA.4 Secondo l'impostazione di G.D.Birkhoff**

Descrizione. Si utilizza un'assiomatica di tipo metrico, introdotta circa 70 anni fa da [BIRKHOFF] (le iniziali G.D. servono a distinguere questo autore da altri matematici con lo stesso cognome). Le nozioni basilari sono: le lunghezze e le ampiezze angolari.
Pro: Gli assiomi mettono sullo stesso piano le lunghezze dei segmenti e le ampiezze degli angoli.
In questa impostazione si introduce subito la nozione di figure simili e si considera l'uguaglianza come caso particolare di similitudine.
Contro: Si deve presupporre la conoscenza dei numeri reali (come in PA.3).
Manca una tradizione a supporto di questo percorso.
Esempio di testo scolastico: [JURGENSEN ET AL.].

**PA.5 Per via analitica**

Descrizione: Si introducono e si utilizzano sistematicamente i sistemi di coordinate cartesiane.
Pro: Gli strumenti algebrico-analitici sono più potenti di quelli della tradizionale geometria sintetica. Consentono per esempio uno studio sistematico delle curve di grado 2 (coniche) e di quelle di grado 3 , che hanno assunto recentemente una notevole importanza applicativa per la realizzazione di raccordi "dolci" fra tratti curvilinei diversi (**curve spline**).

Contro: Un uso troppo precoce e totalizzante della geometria analitica rischia di far perdere il contatto con gli aspetti autenticamente geometrici della trattazione e con la tradizione euclidea.
Esempi di testi scolastici: Lo [S.M.P.] (la traduzione italiana, non più in commercio, consta di 5 volumi che nelle scuole inglesi sono destinati ad allievi di età compresa tra 11 e 17 anni e che sono affiancati da altrettante "guide per insegnanti").
Ulteriori esempi: i nostri numerosi testi liceali di geometria analitica.

**PA.6 Con l'algebra lineare**

Descrizione: Il percorso, propugnato circa 50 anni fa da [DIEUDONNÉ] consiste nello studio degli spazi vettoriali (reali) dotati di un prodotto scalare definito positivo, con utilizzo di nozioni moderne quali applicazioni lineari, matrici, determinanti, prodotti scalari,...
Pro: Il percorso presenta una sua coerenza interna e prepara il terreno (ma è davvero così ? ) allo studio universitario dell'algebra lineare.
Contro: Lo studio degli spazi vettoriali dotati di prodotto scalare non può essere considerato "geometria".

Agli allievi mancano le basi tecniche e culturali per riconoscere nelle astrazioni algebriche gli enti della geometria intuitiva, familiari fin dalla scuola media.

Anche i "problemi" e gli "esercizi" sono molto artificiosi e astratti e non aiutano a sviluppare l'intuizione geometrica. Per una critica autorevole e ben argomentata a questa impostazione, cfr. [THOM].
Esempio di testo scolastico [LECCESE-CECCARINI].

**PA.7 Basato sull'uso di sussidi informatici**

Descrizione: Ormai esistono numerosi sussidi informatici per uno studio della geometria col computer (Cabri, Cinderella, Geogebra, Derive, Maxima, ...) e ancor più numerose sono le proposte didattiche per un loro uso nell'insegnamento secondario, vedi per es. [BOIERI], [BOIERI-DANÈ], [MARIOTTI], [PELLEGRINO-ZAGABRIO].
Pro: Avvicina alla geometria attraverso l'uso di uno strumento moderno e gradito alla maggior parte dei giovani. Può essere utile per esplicitare le modalità d'uso di riga e compasso, intesi in [EUCLIDE] come strumenti idealizzati.

Favorisce riflessioni (anche linguistiche) nel confrontare strategie risolutive diverse.

Contro: Quanto alla coerenza logica globale si tratta di un circolo vizioso poiché la visualizzazione delle figure sullo schermo e le procedure usate per costruirle si basano (nascostamente) sulla geometria analitica tradizionale.
Rischia di far perdere agli allievi la (già scarsa) manualità con riga e compasso e la (ancor più scarsa) conoscenza della geometria dello spazio.

L'uso del computer rischia di marginalizzare ancor più il ricorso a testi scolastici basati su trattazioni organiche della geometria; rischia quindi di demotivare gli allievi allo studio delle dimostrazioni teoriche che rappresentano il cuore dell'intero edificio geometrico.
Mancano aule attrezzate; non tutti gli allievi possiedono un computer a casa; non tutti gli insegnanti sono preparati per gestire efficacemente il triplice rapporto Docenti-Allievi-Computer.

**DESCRIZIONE DEI 5+1 APPROCCI METODOLOGICI**

**AM.1 Per problemi**

Precisazione terminologica e Descrizione: in questo contesto si intende che i problemi possono essere privi di soluzioni, o avere più soluzioni, o dati mancanti, o dati sovrabbondanti, o contraddittori, ...
Questo approccio si propone di favorire una partecipazione attiva degli allievi al processo di acquisizione delle conoscenze matematiche e della capacità di usarle in modo critico. Fra i numerosi matematici che hanno caldeggiato questo tipo di approccio si possono citare [POLYA] (Scoperta guidata: dall'esame di casi singoli a proprietà più generali), [LAKATOS] (analisi critica dei presupposti sui quali poggia il teorema di Eulero per i poliedri), [ODIFREDDI] (ricostruzione a ritroso del percorso seguito da Euclide nel primo libro degli Elementi con l'obiettivo finale di pervenire ad una dimostrazione del teorema di Pitagora) , [GRUGNETTI-VILLANI] (utilizzo del metodo delle "isole deduttive"), [AA VV, MATEMATICA 2001 e 2003] (due voll. ricchi di "consigli" e di preziosi "**sconsigli**").
Pro: L'obiettivo che ci si prefigge con questo approccio è estremamente importante e ampiamente condiviso (almeno a parole) dai docenti di tutti gli ordini scolastici (e non solo per l'insegnamento-apprendimento della geometria).
Contro: Il tempo necessario, la frammentarietà, la difficoltà a coinvolgere gli allievi più deboli o demotivati (per approfondimenti su

quest'ultimo aspetto rinvio al recente libro di [ZAN]).

**AM.2 Di impostazione storica**

Precisazione terminologica e Descrizione: Non si pretende di calare nell'insegnamento pre-universitario una vera e propria ricerca storica. L'obiettivo è più modesto e si propone solo di inquadrare storicamente un certo numero di risultati che rappresentano pietre miliari per lo sviluppo della matematica. Ecco alcuni esempi in ambito geometrico:

* Il teorema di Pitagora (su questo esempio specifico tornerò più oltre).
* Il teorema di Talete e la misura dell'altezza delle piramidi.
* La duplicazione del quadrato nel dialogo tra Socrate e uno schiavo, narrata da Platone nel Menone.
* Eratostene e la misura del raggio terrestre.
* Euclide e la strutturazione della geometria come prototipo di sistema ipotetico-deduttivo.
* Archimede e la determinazione del valore numerico di $\pi$.
* Cavalieri e il suo "principio" per il calcolo dei volumi.
* Cartesio e la nascita della geometria analitica.
* I problemi geometrici che hanno determinato ampliamenti delle strutture numeriche (razionali, irrazionali, trascendenti, complessi).
* Saccheri, Gauss, Bolyai, Lobacevskij e le geometrie non euclidee.
* Klein e la classificazione delle geometrie in base ai loro gruppi di trasformazioni.
* Hilbert e le ricerche sui fondamenti della geometria euclidea.

Pro: Esempi di storia delle idee, che purtoppo nell'insegnamento tradizionale non trovano spazio né nei testi scolastici di Storia, né in quelli di Filosofia, né in quelli di Matematica.

Occasione per osservare "dal vivo" il lavoro dei matematici di tutte le epoche.

Contro: Si possono affrontare in chiave storica solo singoli episodi, non l'intero e spesso tortuoso sviluppo della geometria.

Se l'aspetto storico-aneddotico prevale su quello matematico-disciplinare si finisce col "parlare di geometria" anziché "fare geometria".

Indicazioni bibliografiche: [MANARA-LUCCHINI] , [BOTTAZZINI ET AL.], [DUNHAM] , [FURINGHETTI, 2004], [DEMATTÈ]. Inoltre numerosi articoli su varie riviste italiane e internazionali.

**AM.3 Di tipo pragmatico-applicativo**

Descrizione: Molte teorie matematiche astratte sono scaturite da problemi concreti o comunque hanno trovato molteplici applicazioni concrete. Indicazioni bibliografiche: [OECD], [BRANDI-SALVADORI], contributi di vari autori pubblicati in [MAMMANA-VILLANI] e frequenti articoli presenti su riviste di didattica della matematica. Spunti interessanti in mostre e musei della matematica.

Esempi proponibili a livello di scuola secondaria:

* Come va usata una livella per stabilire se un piano è orizzontale.
* Il ruolo dei tre canali semicircolari presenti nell'orecchio interno per assicurare il nostro equilibrio corporeo.
* L'ottimizzazione dello spazio disponibile, risolto dalle api con le celle a base esagonale. Ottimizzazione che è applicabile anche alla disposizione delle piante in un frutteto o di un certo numero di barattoli cilindrici entro una scatola a base rettangolare, ecc.
* Lo "sphere-packing problem" (impacchettamento di massima densità di sfere uguali).
* Le rotte più brevi (geodetiche) sulla superficie terrestre.
* Le geodetiche nella geometria "del tassista".
* Il confronto fra i raggi di curvatura delle ruote anteriori e di quelle posteriori di un'automobile o di una bicicletta.
* La rigidità delle strutture a maglie triangolari nel piano e tetraedrali nello spazio.
* Le proprietà ottiche delle coniche e delle quadriche di rotazione.
* La trasformazione di un moto circolare in moto rettilineo (Peaucellier).
* La determinazione di distanze tra punti inaccessibili (per esempio: distanza Terra-Luna e Terra-Sole).

Pro: Un approccio di questo tipo può contribuire a dare una risposta concreta alla frequente domanda "A che serve la matematica? " risposta complementare a quella di Jacobi (Per l'onore dello spirito umano).

Contro: È dispersivo. Proposte belle e interessanti a diversi livelli di difficoltà ma mancano raccolte organiche.

**AM.4 Di tipo interdisciplinare**

Descrizione: Questo percorso mira a gettare un ponte tra la matematica (nel nostro caso la geometria) e le altre discipline.

Esempi:

* Fisica: Ottica geometrica, orbite planetarie, ...
* Chimica e cristallografia: strutture molecolari e cristalli,...
* Geografia e Astronomia: Geometria della sfera, carte geografiche, dimensioni della terra, del sistema solare, dell'universo,...
* Arte, Storia dell'arte e Disegno tecnico: assonometria e prospettiva; la geometria nelle opere di Escher.
* Filosofia: Stretto connubio tra speculazioni filosofiche e geometria (basti pensare a Platone, Galileo, Cartesio, Kant, ...).
* Lingua Italiana e altre lingue (classiche e moderne): lettura e/o traduzione e commento di brevi brani di autori classici (Platone, Galileo, ....).

Confronti (limitati a qualche specifico argomento) fra l'impostazione data nei testi italiani in adozione e i corrispondenti testi scolastici di altri Paesi.

Pro: Ampia valenza culturale e collaborazione con docenti di altre discipline.

Contro: Resistenze culturali e psicologiche.

Difficoltà nell'organizzazione di momenti di copresenza,....

**AM. 5 Con l'obiettivo di fughe in avanti**

Descrizione: Ci si propone di mettere in contatto gli allievi degli ultimi anni di scuola secondaria superiore con i recenti e spettacolari progressi della matematica (e in particolare della geometria) e con i molti problemi tuttora aperti che attendono di essere risolti.

Esempi:

Geometrie non euclidee

Geometrie in dimensioni maggiori di 3

Frattali

Teoria delle catastrofi

Superfici minime e bolle di sapone.

Pro: Consente di sfatare l'opinione diffusa che la geometria sia una disciplina "morta" nella quale non c'è più nulla da scoprire.

Può suggerire a studenti ben motivati spunti per la preparazione di tesine impegnative in vista degli esami di maturità.

Contro: C'è un inevitabile scollamento tra questi argomenti avanzati e tecnicamente complessi, e la geometria dei programmi scolastici pre-universitari. Si rischia quindi di parlare di ciò che non si sa.

Scarseggiano testi di riferimento rigorosi e al tempo stesso accessibili a

studenti di scuola secondaria.
Dopo questa veloce carrellata torno ora brevemente su quanto accennato all'inizio dell'esposizione, discutendo pregi e difetti di un ulteriore possibile approccio, quello "eclettico":

**AM.6. Approccio eclettico.**

Precisazione terminologica e Descrizione: Con questo termine intendo riferirmi idealmente ad un percorso flessibile, snodato lungo tutto l'arco degli studi (dalla scuola materna alla maturità) e che miri ad interessare e a coinvolgere gli allievi, valorizzando non solo ciò che essi hanno precedentemente studiato, interiorizzato, memorizzato, dimenticato, ma anche la loro capacità di stabilire collegamenti tra aspetti diversi della geometria, e di "vedere" la geometria nascosta in altri ambiti disciplinari e in situazioni extra-scolastiche di vita reale.
Pro: Un insieme di nozioni slegate tra loro non fa cultura, la capacità di stabilire collegamenti tra aspetti diversi, sì .
Contro: Le difficoltà attuative, dovute ad una tradizione d'insegnamento della geometria e più in generale della matematica e delle altre discipline scientifiche, che si basa su una pedissequa aderenza ai testi scolastici in adozione.
Ecco a titolo esemplificativo una traccia per un possibile itinerario "eclettico" relativo al più classico dei teoremi: quello di Pitagora. Chi mi ha seguito fin qui non dovrebbe avere difficoltà ad incasellare ciascuno degli spunti qui sotto elencati in un'opportuna fascia di scolarità e in uno o più dei percorsi e degli approcci metodologici illustrati in precedenza:

**Proposta per un itinerario "eclettico" relativo al tema "Teorema di Pitagora"**:
* Realizzazione concreta di un angolo retto col sistema dei tenditori di corde egizi, sfruttando la terna pitagorica 3,4,5 (basta una corda e un po' di pazienza).
* Puzzles che visualizzano varie equiscomposizioni (o equicompletamenti) del quadrato sull'ipotenusa con i due quadrati sui cateti. Materiale interessante che affascina i visitatori di età compresa tra 8 e 80 anni si trova per esempio nel museo per la matematica "Il Giardino di Archimede" (vedi [GIUSTI]) ma lo possono produrre artigianalmente anche gli stessi insegnanti e i loro allievi.
* Comprensione dell'enunciato del teorema e sua memorizzazione (uno

dei pochi teoremi di geometria piana che a mio avviso devono entrare a far parte della memoria a lungo termine).
* Ragionamenti semi-formalizzati per dimostrare (col metodo delle “isole deduttive”) la correttezza teorica di una o più equiscomposizioni (o equicompletamenti), già note a livello informale, individuando le proposizioni utilizzate in tali dimostrazioni.
* Riflessione sulla giustificazione teorica del procedimento usato dai tenditori di corde (si sfrutta *l’inverso* del teorema di Pitagora! ).
* Collocazione storica e localizzazione geografica dei tempi e dei luoghi nei quali Pitagora è vissuto. Attraverso quali vicissitudini il suo teorema è giunto fino a noi?
* Applicazioni del teorema di Pitagora. Per esempio: lunghezze dei perimetri dei poligoni regolari di $2^n$ lati inscritti e circoscritti ad una circonferenza di diametro unitario, oppure altezza del punto d’appoggio di una scala di lunghezza nota L, in funzione della distanza D del piede della scala da una parete verticale, ecc).
* Il teorema di Pitagora come coronamento del sistema assiomatico adottato nel libro di testo. Riflessione storica sulle origini della matematica greca e sulla sua sistemazione ad opera di Euclide. Tracciamento di un grafo delle proposizioni utilizzate esplicitamente o implicitamente nella dimostrazione riportata sul libro di testo o in quella euclidea (cfr. [ODIFREDDI]. §1.2 e 1.3).
* Confronto con altre dimostrazioni dello stesso teorema (per es. quella per equiscomponibilità, quella per equicompletabilità e quella con le similitudini). Tracciamento, per ciascuna di queste dimostrazioni, di un grafo analogo a quello di cui al punto precedente.
* Visualizzazione dinamica al computer della dimostrazione euclidea (e/o di altre dimostrazioni).
* Confronto con le presentazioni dello stesso teorema in altri testi scolastici italiani, o inglesi o di altre lingue conosciute dagli allievi (incluse eventuali versioni latine degli Elementi).
* Estensione della validità del teorema al caso in cui in luogo dei 3 quadrati si considerano 3 generiche figure simili (con gli stessi rapporti di similitudine dei quadrati) per es. triangoli equilateri, o pentagoni regolari, o esagoni regolari, o semicerchi.
* Il ruolo del teorema di Pitagora nella dimostrazione dell’irrazionalità della radice di due (rapporto fra diagonale e lato di un quadrato).
* Uso del teorema di Pitagora per determinare la lunghezza della diagonale di un cubo di spigolo unitario o più in generale la lunghezza

delle diagonali di una scatola di spigoli a , b , c.
* Calcolo del rapporto fra lato e altezza di un triangolo equilatero.
* Calcolo del rapporto fra spigoli e altezza di un tetraedro regolare o di una piramide regolare a base quadrata (con applicazioni ad un problema di interesse applicativo: lo “sphere packing problem”).
* Il teorema di Carnot come estensione del teorema di Pitagora.
* Il ruolo del teorema di Pitagora per stabilire la formula della distanza tra due punti in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche. Per una discussione su questo aspetto cfr. il §14 di [VILLANI, 2006].
* Ricerca della totalità delle terne pitagoriche.
* Cenno sulla ricerca di soluzioni intere (>0) per le equazioni della forma $a^n+b^n=c^n$ con $n\geq 3$. (Cosiddetto “Ultimo teorema di Fermat” dimostrato solo pochi anni fa da A. Wiles).
* Estensione del teorema di Pitagora al caso tridimensionale. (cfr. [VILLANI, 2006], §14.)
I lettori interessati potranno elaborare facilmente proposte analoghe relative ad altre aree tematiche, per esempio:
* Teorema di Talete e sue applicazioni. (cfr. §15 di [VILLANI, 2006]),
* Misure di lunghezze, aree, volumi e ampiezze angolari. (cfr. §9, 10, 11, 12 di [VILLANI, 2006]),
* Analogie e differenze fra la geometria (euclidea) del piano e la geometria della superficie sferica (cfr §22 di [VILLANI, 2006]).

Consentitemi di aggiungere, prima di concludere questa esposizione forse troppo “notarile”, un’ultima breve riflessione “personale”.
A mio avviso, almeno nell’arco della scolarità obbligatoria l’insegnamento-apprendimento della geometria (e più in generale quello della matematica) dovrebbe tenere conto sia degli aspetti culturali, disciplinari e tecnici specifici, sia della loro spendibilità “non scholae sed vitae” nelle più svariate professioni, incluse quelle lontane dalla nostra disciplina (per esempio nelle professioni mediche, giuridiche, economiche, amministrative, giornalistiche, dell’artigianato,...).
In questa ottica, ecco un elenco “minimale” (ma niente affatto scontato, vedi [MA-LI]) delle conoscenze e competenze irrinunciabili in ambito geometrico che, secondo me, tutti gli allievi dovrebbero essere gradualmente aiutati ad interiorizzare, per possederle poi stabilmente al termine della scuola dell’obbligo:
* Conoscere e saper utilizzare correttamente la terminologia

geometrica di base (nomi delle figure piane e solide, relazioni di parallelismo e perpendicolarità, proprietà di simmetria, similitudini).
* Saper descrivere a parole, in modo chiaro e in buon italiano, semplici percorsi (per esempio da casa a scuola) in termini topologici e/o metrici.
* Conoscere le principali unità di misura per lunghezze, aree, volumi, ampiezze angolari, tempi e pesi, avendo anche una percezione corretta dei loro "ordini di grandezza" in rapporto con parti del proprio corpo o con oggetti di uso comune (per esempio esprimere la capienza di un "metro cubo" in termini di "litri" o di "kilogrammi di acqua". Oppure stimare la lunghezza di un percorso in base ai minuti impiegati a percorrerlo a piedi, ad andatura normale).
* Conoscere le formule per il calcolo di lunghezze, aree e volumi di alcune semplici figure geometriche bi- e tri-dimensionali e saper rintracciare su un manuale, o mediante ricerche mirate in rete, le formule relative ad altre figure geometriche (non studiate o non memorizzate) sapendole poi utilizzare correttamente.
* Saper usare correttamente connettivi e quantificatori.
* Avere compreso la logica soggiacente ad un ragionamento ipotetico-deduttivo, vale a dire sapere che (anche al di fuori dell'ambito geometrico) ogni ragionamento si basa sull'uso di termini primitivi, assiomi, definizioni, enunciati di proposizioni (teoremi) e loro dimostrazioni.
* Saper decidere se un (semplice) ragionamento ipotetico-deduttivo è corretto o no.
* Conoscere gli enunciati di alcuni (bastano pochi) teoremi di geometria e ricordarne le dimostrazioni o saperle ricostruire ricorrendo al libro di testo o ai propri appunti.
* Sapere che in una similitudine ampiezze angolari, lunghezze, aree, volumi si modificano secondo i fattori di proporzionalità:

$$k^0 (=1) \qquad k^1 (=k) \qquad k^2 \qquad k^3$$

* Saper tradurre un problema geometrico in termini analitici (con scelta appropriata del sistema di riferimento) e saper interpretare i risultati analitici in termini geometrici (vedi [VILLANI, 2006], §13).
* Essere in grado di "ricostruire" una figura tridimensionale in base alla conoscenza di due, tre o più sue proiezioni (o sezioni) piane.
* Conoscere le nozioni di "sistema articolato" e di "struttura rigida" ed essere consapevoli della loro importanza nelle utilizzazioni tecnologiche.

* Essere consapevoli del ruolo storicamente svolto dalla geometria nello sviluppo di tutte le altre scienze.

Un elenco di questo tipo, compilato personalmente da ciascun insegnante, potrebbe rappresentare uno strumento utile:

* Come base concreta per stabilire un confronto dialettico e una successiva collaborazione tra insegnanti di classi parallele o tra insegnanti di ordini scolastici diversi. Vedi in proposito [VILLANI, 2003] e [CARIGNANI].
* Ai fini dell'esplicitazione di un "contratto didattico" condiviso da docenti e allievi, rispetto ai traguardi (pochi ma irrinunciabili) che ogni singolo allievo dovrebbe impegnarsi a raggiungere in forma certa e duratura a conclusione di un prefissato arco di tempo. Quanto alla difficoltà di raggiungere traguardi siffatti al termine della scuola media, vedi per esempio [MA-LI].
* Per valutare la maggiore o minore adeguatezza dei vari testi scolastici proposti dalle case editrici, rispetto alle caratteristiche specifiche del proprio insegnamento. Segnalo in proposito due ricerche sulle caratteristiche dei libri di testo per la scuola media ([MALARA,1992]) e per la scuola superiore ([QUATTROCCHI-FIORI]). Entrambe sono "datate" ma i criteri adottati per i confronti possono essere considerati tuttora validi.

Da queste ricerche, nonché dall'esperienza personale dei singoli insegnanti, emerge la constatazione che ai fini dell'adozione di un libro di testo di geometria (o più in generale di matematica) è importante tenere conto sia dell'adeguatezza dei contenuti disciplinari specifici, sia del rispetto di taluni requisiti formali del tipo:

* Presenza di collegamenti sistematici tra argomenti diversi, ad es. geometria piana e geometria dello spazio, geometria sintetica e geometria analitica, confronto tra le proprietà geometriche del piano e della sfera, ... (in opposizione al sistema dei moduli e delle unità didattiche autosufficienti, attualmente tanto di moda);
* Esposizione molto sintetica e formulata in un linguaggio comprensibile per gli allievi, affiancata da una buona guida per insegnanti. Ad es. per la geometria nel triennio della scuola media, o per il primo biennio delle scuole secondarie superiori non andrebbero superate le 200 pagine complessive (le guide per insegnanti potrebbero avere invece anche mole superiore);
* Presenza di un dettagliato indice analitico, atto a consentire una facile consultazione.

Questi tre requisiti, decisamente contro-corrente tanto da poter sembrare “rivoluzionari” per l’editoria italiana, sono la norma nei Paesi dove la nostra disciplina è insegnata con maggiore efficacia e successo!

**BIBLIOGRAFIA**

[AA VV, MATEMATICA 2001] Matematica 2001 (La Matematica per il cittadino, Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Scuola Primaria e Scuola secondaria di primo grado), Liceo Scientifico Statale Vallisneri, Lucca, 2001.

[AA VV, MATEMATICA 2003] Matematica 2003 (La Matematica per il cittadino, Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Ciclo secondario), Liceo Scientifico Statale Vallisneri, Lucca, 2003.

[BIRKHOFF] G. D. Birkhoff and R. Beatley, Basic Geometry, Chelsea Publ., 1963 (Prima ed. 1940).

[BOERO] P. Boero, Insegnare matematica nella scuola di tutti, Fabbri Ed., 1986.

[BOIERI] P. Boieri, Fare geometria con CABRI, Centro Ric. Did. “Morin”, 1996.

[BOIERI-DANÈ], P. Boieri e C. Danè, Geometria con CABRI, Loescher, 2003

[BOTTAZZINI ET AL.] U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Toti-Rigatelli, Fonti per la storia della matematica, Sansoni, 1992.

[BRANDI-SALVADORI] P. Brandi e A. Salvadori, Modelli matematici elementari, Bruno Mondadori, 2004.

[CARIGNANI] G. Carignani, Insegnare e valutare: gli insegnanti si analizzano, Convegno Nazionale n.11-12 su “Matematica e difficoltà” Pitagora Ed., 2003.

[CASTELNUOVO] E. Castelnuovo, Didattica della matematica, La Nuova Italia, 1963.

[CATENI-FORTINI ET AL.] L. Cateni, R. Fortini (ai quali si sono aggiunti in successive edizioni, e con qualche variazione nei titoli, altri co-autori: C. Bernardi, S. Maracchia, G. Olivieri, F. Rohr). Il pensiero geometrico, Le Monnier, 1957.

[CHOQUET] G. Choquet, L’insegnamento della geometria, Feltrinelli, 1967.

[DEMATTÈ] A. Dematté (editore), Fare matematica con i documenti storici. Una raccolta per la scuola secondaria di primo e secondo grado (un vol. per l’alunno e un vol. per l’insegnante), IPRASE del Trentino, Trento (2006). Per un’eventuale richiesta di copie di questa pubblicazione rivolgersi all’IPRASE.

[DIEUDONNÉ] J. Dieudonné, Algebra lineare e geometria elementare, Feltrinelli, 1970.

[DUNHAM] W. Dunham, Viaggio attreaverso il genio, Zanichelli, 1992.
[ENRIQUES-AMALDI] F. Enriques e U. Amaldi, Elementi di Geometria, Zanichelli (Numerose edizioni e versioni per i diversi tipi di scuole, a partire dal 1903).
[EUCLIDE]. Euclide, Gli Elementi (a cura di A. Frajese e L. Maccioni) UTET, 1970.
[FERRARI] P.L. Ferrari, Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica, Pitagora Ed., 2004.
[FURINGHETTI,1996] Insegnamento-apprendimento della geometria nella scuola secondaria superiore. Riflessioni su strumenti e prescrizioni a disposizione degli insegnanti. Sta in: [M.P.I.], volume per le Scuole Sec. Sup., pp. 15-69.
[FURINGHETTI, 2004] F. Furinghetti, Quattro anni di impegno internazionale su storia e didattica: bilanci e prospettive. In "L'Ins. della Mat. e delle Sci. Int., 27A-B, pp. 723-743 (2004).
[GIUSTI] E. Giusti (Curatore) Pitagora e il suo teorema, Polistampa, FI.
[GRUGNETTI–VILLANI] L. Grugnetti e V. Villani (curatori della traduzione italiana di una pubblicazione del CREM, Belgio) La matematica dalla materna alla maturità, Pitagora Ed.,1999.
[HILBERT] D. Hilbert, Fondamenti di geometria, Feltrinelli, 1970.
[JURGENSEN ET AL.] R.C. Jurgensen , R.G. Brown, J.W. Jurgensen, P. Oriolo, A. Coda, L. Tess, Elementi di Geometria, Bruno Mondadori, 1991.
[LAKATOS] J. Lakatos, Dimostrazioni e confutazioni - La logica della scoperta matematica, Feltrinelli, 1979.
[LECCESE-CECCARINI] G. Leccese e U. Ceccarini, Geometria e trasformazioni, Bulgarini, 1990.
[MALARA, 1992] N. Malara, Matematica. Sta in "I libri di testo per la scuola media", a cura di Diega Orlando Cian, Gregoriana Ed., 1992, pp. 528-596.
[MALARA, 1996] N. Malara, L'insegnamento della geometria nella scuola media. Questioni teoriche e didattico-metodologiche. Sta in: [M.P.I.] Volume per le Sc. Sec. di Primo grado, pp.13-76.
[MA-LI] (Matematica e Lingua) AA VV. Ricerca dell'IRRSAE Toscana sul passaggio tra la scuola secondaria di primo grado e quella di secondo grado) Le Monnier, 1999.
[MAMMANA] C. Mammana, I "Grundlagen der Geometrie" e i libri di testo di geometria in Italia. Sta in Le Matematiche, suppl. al vol. 55.
[MAMMANA-VILLANI] C. Mammana e V. Villani (editori) , Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, an ICMI Study, Kluwer, 1998.
[MANARA-LUCCHINI] C.F. Manara e G. Lucchini, Momenti del pensiero matematico, Mursia, 1976.
[MARIOTTI] M.A. Mariotti, La geometria in classe, Pitagora Ed., 2005.
[MENGHINI] M. Menghini, La geometria nelle proposte di riforma tra il

1960 e il 1970, in L'educazione matematica, vol. 28, Febb. 2007, pp. 29-40.
[M.P.I.] Min. della P. I. e Liceo Scient. Vallisneri - Lucca: L'insegnamento della Geometria, Seminario di formazione per docenti di Sc.Sec. di primo grado e di Sc. Medie superiori, 1995-1996 (Con contributi di vari autori).
[NUMI, 2006] AAVV, La matematica per le altre discipline, Notiziario UMI, Gennaio 2006.
[ODIFREDDI], P.G. Odifreddi, Divertimento geometrico - Le origini geometriche della logica da Euclide a Hilbert, Bollati-Boringhieri, 2003.
[OECD] PISA 2003, Valutazione dei quindicenni, Armando, 2004.
[ORIOLO] P. Oriolo, Incontri con le figure, Mondadori, 1972
[PELLEGRINO, ZAGABRIO] C. Pellegrino e M.G. Zagabrio. Invito alla geometria con Cabri-Géomètre, IPRASE del Trentino.
[POLYA] G. Polya: La scoperta matematica - Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi, Feltrinelli, 1971.
[PRODI ET AL.] G. Prodi e numerosi collaboratori, Scoprire la matematica, Ghisetti e Corvi, 2003. Il testo consta di vari fascicoli tra cui quello di G. Prodi e A.M. Bastianoni: "Geometria del piano".
[QUATTROCCHI-FIORI] P. Quattrocchi e C. Fiori, Esame di testi di matematica largamente adottati nelle scuole secondarie superiori (Anno scolastico 1985/06), CNR, Progetto Strategico "Tecnologie e Innovazioni Didattiche".
[SMP] Traduzione di 5 voll. dello School Mathematics Project e relative guide per l'insegnante (a cura dell'U.M.I.), Zanichelli, 1972-1976.
[THOM] R. Thom, La matematica moderna: esiste? Sta in C. Sitia (curatore) La didattica della matematica oggi. Problemi, ricerche, orientamenti. Quaderno 10 dell'U.M.I., pp. 111-129.
[VILLANI 1985] V. Villani (con la collaborazione di M. Sainati Nello e M. Sciolis Marino), La Geometria dallo spazio al piano, Quaderno n. 2 del CNR, Sem. Did. fac. di Scienze, Univ. di Pisa).
[VILLANI, 2003] V. Villani, Valutare in matematica: Cosa? Come? Perché? In Atti del Convegno Nazionale n.11-12 su "Matematica e Difficoltà", Pitagora Ed., 2003.
[VILLANI, 1994] V. Villani, L'insegnamento preuniversitario della matematica: molte domande, qualche risposta. In "L'ins. della Mat. e delle Sci Int." 17 A-B, 1994 pp.439-457.
[VILLANI,1995] V. Villani, Le trasformazioni geometriche nella scuola secondaria superiore. In "L'ins. della Mat. e delle Sci. int," 18 A-B, 1995 pp.669-688.
[VILLANI, 2006] V. Villani, Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria), Pitagora Ed., 2006.
[ZAN], R. Zan, Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire, Springer, 2007.