Geometria vettoriale

Abstract

In books used by Italian High School students, vectors are usually shown as a stand-alone topic. In this paper, we want to underline the geometrical genesis of vectorial concepts. We will present also how they can be used to unify several topics of High School curricula.

Nei testi scolastici italiani per le scuole superiori i concetti vettoriali sono generalmente presentati come un capitolo a se stante. In questo articolo ci proponiamo di evidenziare l'origine geometrica dei principali concetti vettoriali. Esporremo anche come essi possano essere visti come chiave di unificazione di molti argomenti presenti nei curricoli di scuola superiore.

prof. Sergio Zoccante

Geometria vettoriale

prof. Sergio Zoccante
Liceo Scientifico Quadri, Vicenza
SSIS Veneto

Riferimenti curricolari

Elenco di seguito gli argomenti che possono essere trattati con un approccio vettoriale, quale quello che intendo proporvi.

Dai programmi PNI del 1997 (in *corsivo* gli argomenti opzionali):
TEMA: INSIEMI NUMERICI E STRUTTURE
Vettori nel piano.
Spazi vettoriali: struttura di spazio vettoriale in R^2 *e in* R^3. *Basi, applicazioni lineari*. Risoluzione di sistemi lineari. *Struttura algebrica dell'insieme delle matrici*.
TEMA: GEOMETRIA
Cambiamento del sistema di coordinate.
Equazioni delle isometrie e delle similitudini. Affinità e loro equazioni. Proprietà invarianti.
Teorema del coseno e teorema dei seni. Risoluzione dei triangoli.
Incidenza, parallelismo, ortogonalità nello spazio. Angoli tra rette e piani, angoli diedri, triedri.
Poliedri regolari. Solidi notevoli.

Perché una geometria vettoriale

Ecco una sintesi dei motivi che mi portano a preferire questo approccio.
La nozione di vettore è

Uno strumento potente: lega la geometria all'algebra in modo diverso dalla geometria analitica. In quest'ultima, il legame tra le equazioni, le formule in genere e il loro significato geometrico è nascosto; normalmente bisogna cercarlo analizzando come i vari coefficienti si vengono a formare: pensate ad esempio all'equazione di una retta o di una circonferenza. Le formule corrispondenti nella geometria vettoriale esprimono in modo diretto il loro significato geometrico, come vedremo nel seguito.

Una idea guida unificante: tutti gli argomenti elencati in precedenza risultano correlati tra loro, ed anche risultati che in altri approcci risultano isolati, qui assumono un significato in un contesto ricco. Si pensi ad esempio al teorema di Rouché-Capelli.

Un metodo generalizzabile a dimensione *n*: molti dei risultati che si ottengono in dimensione due e tre sono validi per le dimensioni maggiori (purché finite), con l'identica dimostrazione.

Uno strumento fondamentale in molte discipline (matematica, fisica, statistica, informatica …).

Un po' di storia …

"La nozione di vettore (…) entrò nella matematica discretamente" dice Morris Kline (*Storia del pensiero matematico,* pag. 905).

Concettualmente, si trovano riferimenti precisi già in Aristotele, e poi in Stevino e Galilei, quando trattano della composizione dei moti.

Con Wessel, Argand e Gauss (fine '700, inizio '800) si rappresentano i vettori piani con i numeri complessi.

Con G. Bellavitis (1830 circa), fanno la loro comparsa ufficiale i vettori geometrici, così come li conosciamo noi.

Ma i fisici si aspettavano dell'altro, dei numeri "tridimensionali" che descrivessero lo spazio così come i numeri complessi descrivevano

il piano.
Hamilton prova a rispondere a questa esigenza, e inventa i *quaternioni* (1843)
Grassmann nel 1844 pubblica "*Il calcolo lineare dell'estensione*" (che resta praticamente ignorato).
Maxwell nel 1873 isola i vettori tridimensionali dai quaternioni, e li usa sistematicamente nei suoi lavori.
La teoria dei vettori raggiunge l'autonomia dalla teoria dei quaternioni con J. W. Gibbs e O. Heaviside (dagli anni 1880).

Alcuni punti

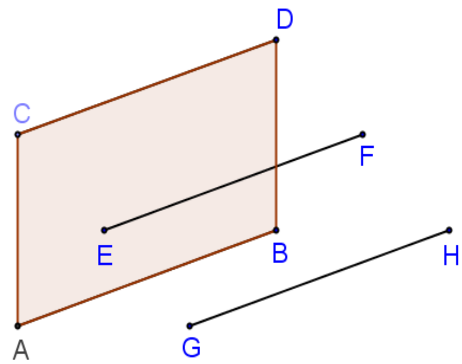
Affronto ora alcuni punti, senza volere essere esaustivo (ad esempio, non affronto l'addizione e la moltiplicazione per uno scalare, né il concetto fondamentale della *dipendenza-indipendenza lineare*, e quindi di *base*; naturalmente in classe questi argomenti sono tutti svolti), ma con lo scopo di evidenziare l'*origine geometrica* dei principali concetti vettoriali, e mostrare come il concetto di vettore sia chiave di unificazione di argomenti molto diversi.
Ecco l'elenco:
Costruzione di un vettore tramite l'equipollenza
Parallelismo
Equazione vettoriale della retta
Prodotto scalare
Trasformazioni: isometrie e similitudini
Trasformazioni: affinità in genere
Rette, piani, sfere nello spazio (non affrontato qui)
Prodotto vettoriale
Prodotto misto
Teorema di Rouché-Capelli (non affrontato qui).

Equipollenza

Nel piano o nello spazio geometrico si definisce la *relazione* seguente tra *coppie ordinate di punti (una coppia ordinata di punti può anche essere denominata segmento orientato)*:

$(A, B) \approx (C, D)$ se *ABDC* è un *parallelogramma*, eventualmente degenere.

Questa relazione è una relazione di equivalenza, denominata *relazione di equipollenza.*



Una classe di equipollenza individua un ***vettore***, identificabile da qualsiasi coppia equipollente; nel seguito un vettore sarà indicato in grassetto corsivo: ***AB***

Va fatta esplicitamente la distinzione tra *vettore* e *vettore applicato* o *segmento orientato*, in quanto la terminologia permette di distinguere le varie situazioni (ricordiamo che probabilmente gli studenti hanno già incontrato i vettori in fisica).

Condizione (algebrica) di parallelismo

Due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono *paralleli* o *collineari* se $\boldsymbol{w} = k\,\boldsymbol{v}$, per qualche k reale, ossia se i due vettori sono multipli uno dell'altro.

Se si ha una base, ed esprimiamo i due vettori tramite le componenti scalari rispetto alla base, ad es. $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ e $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$, allora $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ saranno *collineari* se

$$w_1 = k\,v_1 \quad \text{e} \quad w_2 = k\,v_2$$

O anche se $v_1 : w_1 = v_2 : w_2$

Nel piano, ossia nel caso di avere solo due componenti, la *condizione di parallelismo* diventa

$$v_1\; w_2 = v_2\, w_1.$$

Perciò $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ sono *collineari* se $\det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = 0$

Ma qual è il significato geometrico del numero $\det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$?

Il disegno seguente mostra che il valore assoluto del determinante esprime *l'area del parallelogramma* individuato dai due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$**.**

Infatti (si veda la figura alla pagina seguente, che rappresenta il caso in cui i due vettori cadono nel primo quadrante):

$$\text{area}(\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}) = (v_1 + w_1)\cdot(v_2 + w_2) - v_1\, v_2 - w_1\, w_2 - 2\, w_1\, v_2 =$$
$$v_1\, w_2 - w_1\, v_2 = \det(\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}).$$

In modo analogo si procede negli altri casi.

Questa interpretazione geometrica spiega perché il determinante di due vettori sia nullo quando i vettori sono paralleli.

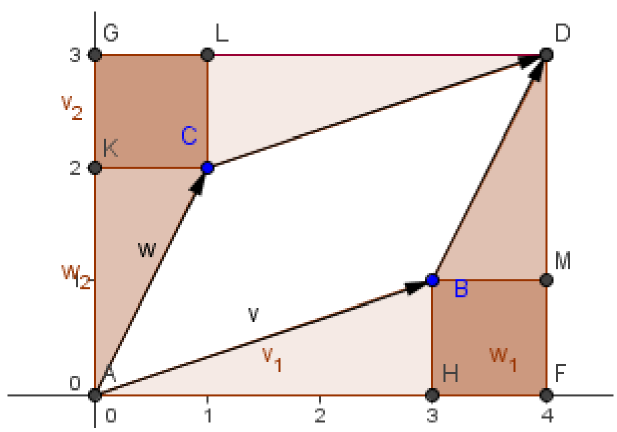
Esercizi tipici

- Prova che/se i 4 punti … sono i vertici di un parallelogramma.

- Dati *A*, *B* e *C* trova il quarto vertice *D* in modo che *ABCD* sia un parallelogramma.

- Quali sono le coordinate del baricentro del triangolo *ABC*?

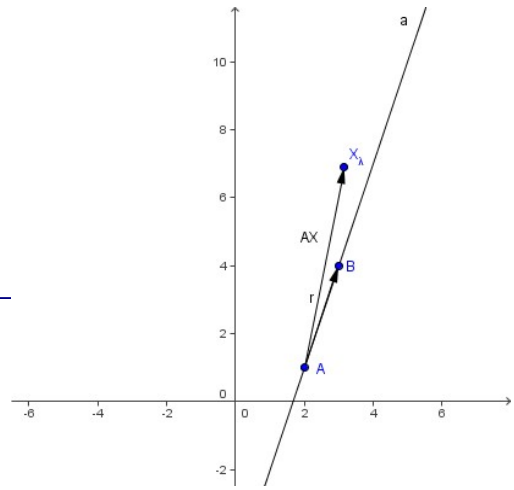
- Dato il quadrilatero di vertici *A*(1;-3), *B*(3;-1), *C*(0;4), *D*(-1;0), provare che i punti medi *M*, *N*, *P* e *Q* formano un parallelogramma.



Equazione della retta

Dato un punto $A(x_A, y_A)$ ed un vettore $\boldsymbol{r}$ (α, β), la retta per A ed avente direzione $\boldsymbol{r}$ è l'insieme dei punti $X(x,y)$ che soddisfano la condizione:

$\boldsymbol{AX} = \lambda\, \boldsymbol{r}$, per ogni λ in $\boldsymbol{R}$ ***(equazione vettoriale della retta).***



Il parallelismo tra i due vettori $\boldsymbol{AX}$ e $\boldsymbol{r}$ può essere espresso come:

$$\det(\boldsymbol{AX}, \boldsymbol{r}) = 0,$$

ossia

$$\det\begin{pmatrix} x - x_A & y - y_A \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0 \,;$$

sviluppando, si ottiene immediatamente l'equazione della retta in forma cartesiana (nel piano)

$$\beta\,(x-x_A) - \alpha\,(y-y_A)=0$$

L'equazione vettoriale:

$$\boldsymbol{AX} = \lambda\, \boldsymbol{r},\ \text{per ogni } \lambda \text{ in } \boldsymbol{R}$$

può essere riscritta come:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + \lambda\, \boldsymbol{r},\ \text{per ogni } \lambda \text{ in } \boldsymbol{R}.$$

E questa è l'equazione della retta in forma *parametrica*: $\begin{cases} x = x_A + \lambda\,\alpha \\ y = y_A + \lambda\,\beta \end{cases}$

.

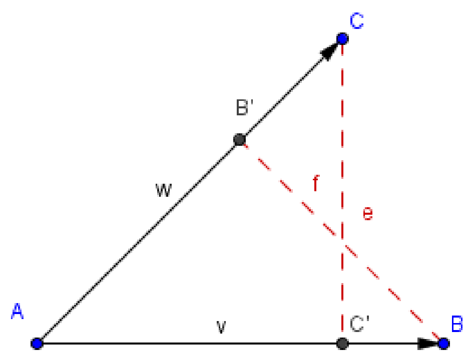
Esercizi tipici
Sono dati i punti $A(-2;-3)$, $B(0;1)$, $C(4;3)$
1. verificare che i tre punti non sono allineati
2. calcolare le coordinate del punto medio P di AC e del punto medio Q di BC.
3. verificare che PQ e AB sono paralleli e che la lunghezza di PQ è la metà di quella di AB.

Prodotto scalare e ortogonalità

Dati due vettori $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{AC}$ per similitudine risulta (vedi figura)

$$AB \cdot AC' = AC \cdot AB',$$

dove B' e C' sono le proiezioni ortogonali di B e C rispettivamente su AC e AB.



Si definisce *prodotto scalare* dei due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ il numero

$$AB \cdot AC' \ (= AC \cdot AB'),$$

oppure 0 se uno dei due vettori è nullo.
Sarà indicato come $\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{w}$.

N.B.: si tratta di un prodotto con segno. Il segno è preso positivo se AB e AC' sono concordi, negativo se discordi.

La *geometria* della definizione porta subito alle proprietà del *prodotto*

scalare:
$\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{w} = 0$ se e solo se $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ o $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ o $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$
$\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{v} = \| \boldsymbol{v} \|^2$
Simmetria:

$$\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{v}$$

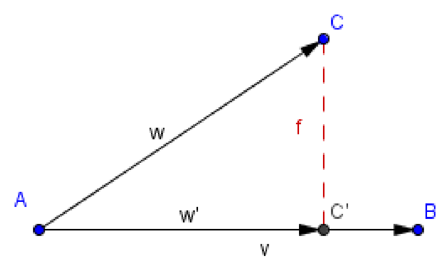
Bilinearità:

$$\boldsymbol{u} \circ (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{w}$$

$a(\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \circ (a\boldsymbol{w})$ per a in $\boldsymbol{R}$

e anche la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*:

$$|\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{w}| \leq \| \boldsymbol{v} \| \cdot \| \boldsymbol{w} \|$$



Infatti, indicata con $\boldsymbol{w'}$ la proiezione di $\boldsymbol{w}$ su $\boldsymbol{v}$ come in figura, risulta $|\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{w'}| = \| \boldsymbol{v} \| \cdot \| \boldsymbol{w'} \| \leq \| \boldsymbol{v} \| \cdot \| \boldsymbol{w} \|$.

Se abbiamo un sistema di riferimento *ortonormale*, e $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ e $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$, la bilinearità porta subito a

$$\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

Quindi, in particolare,

$$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w} \quad \text{se e solo se} \quad v_1 w_1 + v_2 w_2 = 0$$

E anche

$$\| \boldsymbol{v} \|^2 = v_1^2 + v_2^2$$

Ora possiamo utilizzare la perpendicolarità senza passare attraverso le rette.
Inoltre, (quasi) *tutti i concetti introdotti* finora non hanno usato, se non nella notazione con le coordinate, il fatto di essere nel piano; possono essere *estesi* senza difficoltà allo spazio 3D (e anche oltre, se volete).

E naturalmente il prodotto scalare è legato al *coseno* dell'angolo tra i due vettori .

Esercizi tipici

Siano ABC un triangolo rettangolo in A e AH l'altezza relativa all'ipotenusa. Dimostrare che

1. $AB^2 = \boldsymbol{BC \cdot BH}$ (1°teorema di Euclide)
2. $AH^2 = \boldsymbol{HB \cdot HC}$ (2°teorema di Euclide)

Sia ABC un triangolo, G il suo baricentro.

1. mostrare che $\boldsymbol{GA}+\boldsymbol{GB}+\boldsymbol{GC} = \boldsymbol{0}$
2. mostrare che per ogni altro punto X del piano si ha $\boldsymbol{XA}+\boldsymbol{XB}+\boldsymbol{XC} = 3\boldsymbol{XG}$

Trovare il luogo dei punti P che vedono il segmento AB sotto un angolo retto

Trasformazioni affini

Le prime trasformazioni (traslazioni, simmetrie centrali e particolari simmetrie assiali, le omotetie ...) sono tutte del tipo

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

Siamo allora portati a studiare le trasformazioni affini del tipo precedente nella forma più generale.

Il sistema può essere riscritto in forma matriciale come $\boldsymbol{Y = AX + B}$ dove si è posto $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$

Sappiamo come le trasformazioni agiscono sui punti. In particolare, per l'origine O del sistema di riferimento si ha $T(O) = (c, c')$.

Come agiranno sui vettori?
Il calcolo diretto mostra come la trasformazione T agisce sui due vettori della base canonica $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$.
Risulta $T(\boldsymbol{i}) = (a, a')$ e $T(\boldsymbol{j}) = (b, b')$.

Quindi T è completamente determinata da $T(\boldsymbol{i})$, $T(\boldsymbol{j})$ e $T(O)$.
In particolare, $T(\boldsymbol{i})$ e $T(\boldsymbol{j})$ permettono di stabilire se T è *isometria*, *similitudine* o *affinità*.

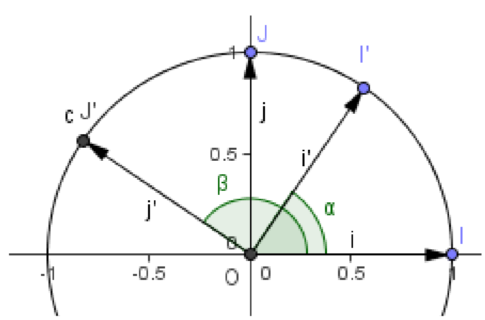
Isometrie

T è *isometria* se
conserva le distanze:
$\|\boldsymbol{i}\| = \|\boldsymbol{j}\| = 1$ e quindi: $\|T(\boldsymbol{i})\| = \|T(\boldsymbol{j})\| = 1$
conserva gli angoli:
$\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{j}$ e quindi: $T(\boldsymbol{i}) \perp T(\boldsymbol{j})$

Perciò T è *isometria* se
$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = 1$ e
$a \cdot b + a' \cdot b' = 0$

Da cui le condizioni algebriche
$a^2 + a'^2 = 1$
$b = +/-a'$ e $b' = -/+a$

Matrice della rotazione
La rotazione di centro O e angolo α è completamente determinata dall'immagine dei due versori $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$.



Poiché $\beta = \pi/2 + \alpha$, si ha

$$T(\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \text{ e } T(\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix},$$

la matrice della rotazione è

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Matrice della simmetria assiale

La simmetria assiale di asse la retta a che passa per l'origine e che forma un angolo α con l'asse x è completamente determinata dall'immagine dei due versori $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$.

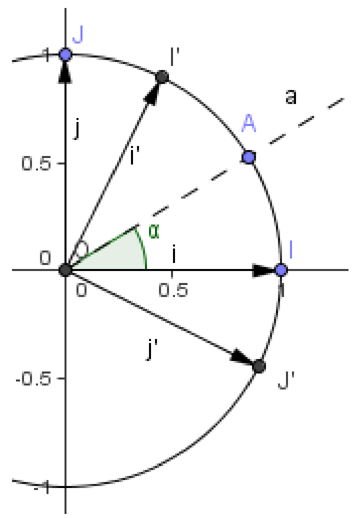
Poiché (vedi figura seguente) l'angolo $IOI' = 2\alpha$, si ha

$$T(\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) \end{bmatrix}$$; e poiché l'angolo

$JOJ' = 2(-\pi/2 + \alpha) = 2\alpha - \pi$, si ha

$$T(\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} -\sin(2\alpha - \pi) \\ \cos(2\alpha - \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(2\alpha) \\ -\cos(2\alpha) \end{bmatrix}.$$

Perciò $T = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix}$.



Similitudini

T è *similitudine* se
conserva i rapporti tra le distanze:

$\| \boldsymbol{i} \| = \| \boldsymbol{j} \|$ e quindi: $\| T(\boldsymbol{i}) \| = \| T(\boldsymbol{j}) \| = k$

conserva gli angoli:

$\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{j}$ e quindi: $T(\boldsymbol{i}) \perp T(\boldsymbol{j})$

Perciò T è *similitudine* se

$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = k^2$ e

$a \cdot b + a' \cdot b' = 0$

Da cui le condizioni algebriche

$a^2 + a'^2 = k^2$

$b = +/-a'$ e $b' = -/+a$

Affinità

T è *affinità* se

$T(\boldsymbol{i})$ e $T(\boldsymbol{j})$ non sono collineari

Perciò T è *affinità* se $\det(T) \neq 0$

Inoltre, sempre guardando la posizione di $T(\boldsymbol{i})$ e $T(\boldsymbol{j})$, si ha che

T è *trasformazione diretta* se $\det(T)>0$,

inversa se $\det(T)<0$

In ogni caso, se F è una figura piana,

$\text{area}(T(F)) / \text{area}(F) = |\det(T)|$

Prodotto vettoriale

Dati due vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ dello spazio *tridimensionale*, il prodotto vettoriale $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ è definito dallo sviluppo del determinante formale:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ è *ortogonale* sia a $\boldsymbol{v}$ sia a $\boldsymbol{w}$, come si vede immediatamente utilizzando il prodotto scalare.
La norma del prodotto vettoriale $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ è

$$||\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|| = ||\boldsymbol{v}||\cdot||\boldsymbol{w}||\cdot\sin(\boldsymbol{vw}),$$

ossia è la misura, se presa in valore assoluto, dell'area del parallelogramma individuato da $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$.
Questo discende dall'identità di Lagrange:

$$||\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}||^2 = ||\,\boldsymbol{v}||^2||\boldsymbol{w}||^2 - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})^2.$$

Poiché $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = ||\,\boldsymbol{v}||||\boldsymbol{w}||\cos(\boldsymbol{vw})$, sostituendo si ha

$$||\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}||^2 = ||\,\boldsymbol{v}||^2||\boldsymbol{w}||^2 - ||\,\boldsymbol{v}||^2||\boldsymbol{w}||^2\cos^2(\boldsymbol{vw}),\text{ da cui}$$

$$||\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}||^2 = ||\,\boldsymbol{v}||^2||\boldsymbol{w}||^2\,(1-\cos^2(\boldsymbol{vw})),\text{ e infine}$$

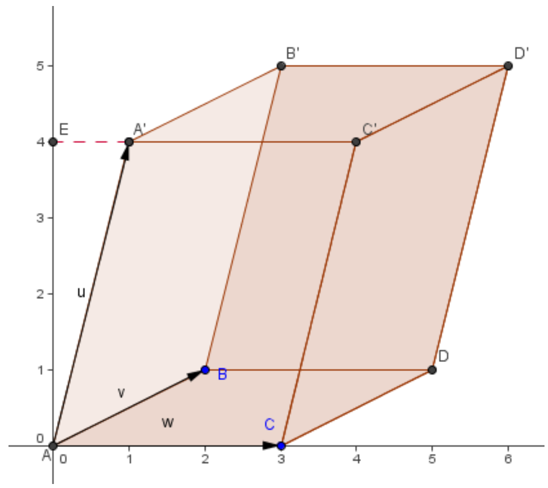
$$||\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}||^2 = ||\,\boldsymbol{v}||^2||\boldsymbol{w}||^2\sin^2(\boldsymbol{vw}).$$

Prodotto misto

Moltiplicando scalarmente $\boldsymbol{u}$ per $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ si ha il "prodotto misto" $\boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$, che è un numero.
Questo si calcola sviluppando il determinante formato dai tre vettori:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Il “prodotto misto” $\boldsymbol{u} \circ (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ ha un’interessante interpretazione geometrica: risulta essere, in valore assoluto, il volume del parallelepipedo individuato dai tre vettori.



Ciò deriva dai fatti seguenti:

- la norma di $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ esprime l’area della base individuata dai due vettori, come notato prima;
- il vettore $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ è ortogonale al piano della base;
- l’altezza del parallelepipedo è la proiezione del vettore $\boldsymbol{u}$ nella direzione di $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$, e quindi è $\| \boldsymbol{u} \| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$.

Poiché si ha

$$\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \| \boldsymbol{u} \| \cdot \| \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \| \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \| \cdot (\| \boldsymbol{u} \| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}))$$

si ottiene per l’appunto il volume del parallelepipedo.

È evidente come questa interpretazione giustifichi il fatto che il determinante di tre vettori è nullo quando i tre vettori giacciono su uno stesso piano.

Bibliografia minima

Leccese-Ceccarini: *Geometria e trasformazioni* Editrice Bulgarini, Firenze 1990, (fuori commercio)

Apostol: *Calcolo, volume secondo, Geometria* Boringhieri, Torino.